|  |  |
| --- | --- |
|  | **Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  **высшего образования**  **«Московский государственный технический университет**  **имени Н.Э. Баумана**  **(национальный исследовательский университет)»**  **(МГТУ им. Н.Э. Баумана)** |

ФАКУЛЬТЕТ Информатики и систем управления

КАФЕДРА Теоретической информатики и компьютерных технологий

**Лабораторная работа № 5**

«Метод наименьших квадратов. Аппроксимация алгебраическими многочленами»

по курсу «Численные методы»

Выполнила:

студент группы ИУ9-61Б

Яровикова Анастасия

Проверила:

Домрачева А. Б.

Москва, 2023

1. **Цель**

Целью данной работы является изучение приближения заданной функции путем аппроксимации алгебраическими многочленами, применяя метод наименьших квадратов, и вычисление значения аппроксимирующего многочлена в серединах частичных отрезков между узловыми точками.

**Постановка задачи**

**Дано:** функция задана конечным набором точек

на отрезке

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

**Задание:**

* Аппроксимировать функцию по методу наименьших квадратов (МНК) многочленом третьей степени ();
* Найти матрицу А и столбец b;
* Найти набор коэффициентов ;
* Найти среднеквадратичное отклонение (СКО) и относительную ошибку ;
* Найти значения аппроксимирующего многочлена в средних точках отрезков между узловыми точками.

**Индивидуальный вариант:**

задана конечным набором точек:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 | 4.5 | 5 |
|  | 3.33 | 2.30 | 1.60 | 1.27 | 1.18 | 0.99 | 1.41 | 0.80 | 1.12 |

1. **Основные теоретические сведения**

Значения приближаемой функции заданы лишь в узлах . Необходимо решить задачу аппроксимации: найти гладкую аналитически заданную функцию , доставляющую наименьшее значение величине

Данную величину называют среднеквадратичным уклонением (СКУ) функции от системы узлов , а описанный подход к решению задачи приближения функции – методом наименьших квадратов (МНК)

Как правило, отыскивают в виде линейной комбинации заранее заданных функций:

Параметры являются решениями линейной системы наименьших квадратов

где – столбец параметров – симметричная положительно определенная матрица с коэффициентами

– столбец правой части системы,

Таким образом, система МНК имеет единственное решение дающее СКУ наименьшее значение (для всех функций данного вида). Система решается методом квадратного корня.

Если приближаемая функция достаточно гладкая, хотя вид ее и неизвестен, аппроксимирующую функцию нередко ищут в виде алгебраического многочлена

Тогда и элементы матрицы получают по формулам:

а свободные члены –

Абсолютной погрешностью аппроксимации выступает СКО:

относительная ошибка:

1. **Реализация**

Листинг 1. Метод наименьших квадратов. Аппроксимация алгебраическими многочленами

import pandas as pd

import numpy as np

from tabulate import tabulate

m = 4

l = 1

r = 5

n = 8

h = (r - l) / n

def f(x):

return np.exp(x)

def find\_lambd2(A, b):

return (np.linalg.inv(A).dot(b.T)).T

def find\_lambd(A, b):

T = np.zeros((m,m))

x = np.empty(m)

y = np.empty(m)

# T

for i in range(m):

for j in range(i):

T[i][j] = (A[i][j] - sum([T[i][k] \* T[j][k] for k in range(j)])) / T[j][j]

T[i][i] = np.sqrt(A[i][i] - sum(T[i][k] \*\* 2 for k in range(i)))

# прямой ход

for i in range(m):

y[i] = (b[i] - sum([T[i,k]\*y[k] for k in range(i)])) / T[i,i]

# обратный ход

for i in range(m-1, -1, -1):

x[i] = (y[i] - sum([T[k,i]\*x[k] for k in range(i+1, m)])) / T[i,i]

return x

xs = np.linspace(l, r, n + 1, True)

mids = np.linspace(l + 0.5 \* h, r - 0.5 \* h, n, True)

ys = np.array([3.33, 2.30, 1.60, 1.27, 1.18, 0.99, 1.41, 0.80, 1.12])

A = np.empty((m,m))

b = np.empty(m)

A = np.array([[sum(xs[k] \*\* (i+j) for k in range(0,n+1)) for j in range(0, m)] for i in range(0,m)])

b = np.array([sum(ys[k] \* (xs[k] \*\* i) for k in range(0,n+1)) for i in range(0, m)])

print("\nA:", A)

print("\nb:", b)

lambd = find\_lambd(A,b)

print("\nλ:", lambd)

def z(x):

return sum([lambd[i] \* x\*\*i for i in range(m)])

D = sum([(ys[k] - z(xs)[k]) for k in range(m+1)])\*\*2

D = np.sqrt(D) / np.sqrt(n)

print("\nСКО Δ:", D)

d = sum([ys[k]\*\*2 for k in range(n+1)])

d = D / np.sqrt(d)

print("\nотн. погрешность δ:", d)

print()

for k in range(n + 1):

print("x:", xs[k], " f(x):", ys[k], " z(x):", z(xs)[k], " |f - z|:", abs(ys[k] - z(xs)[k]))

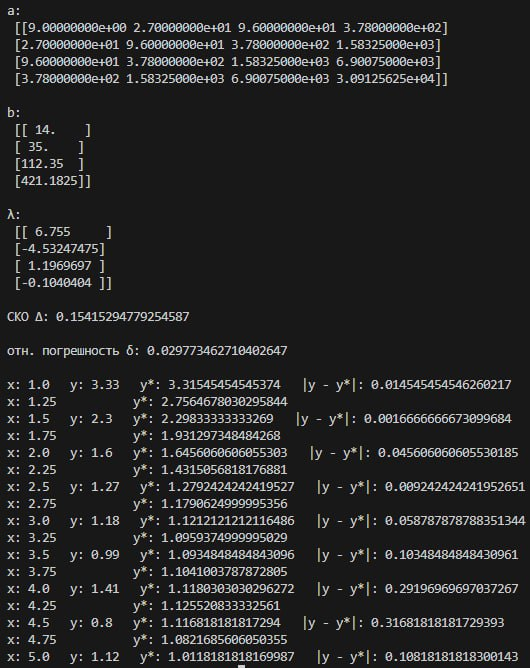
if k != n:

print("x:", mids[k], " z(x):", z(mids)[k])

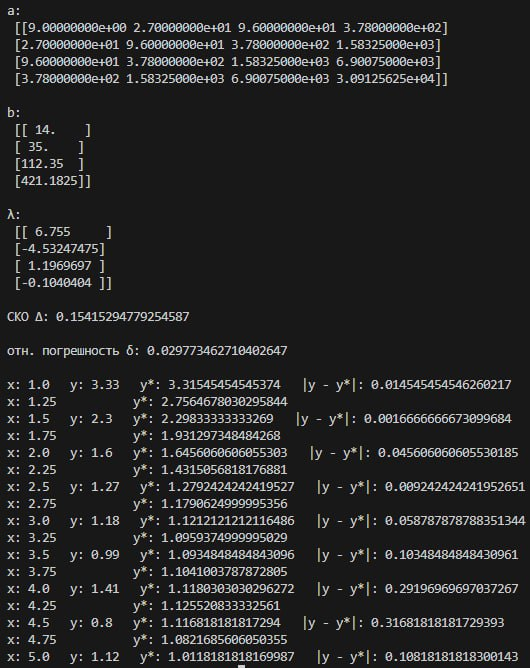
1. **Результаты**

Для заданной функции найдены:

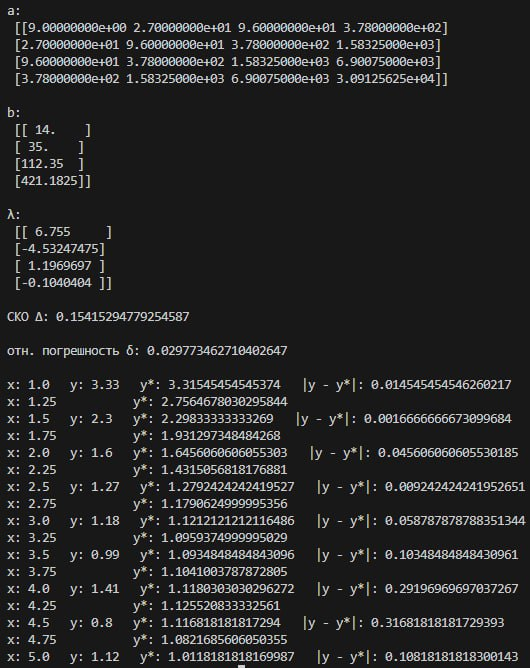
а) матрица и столбец ;



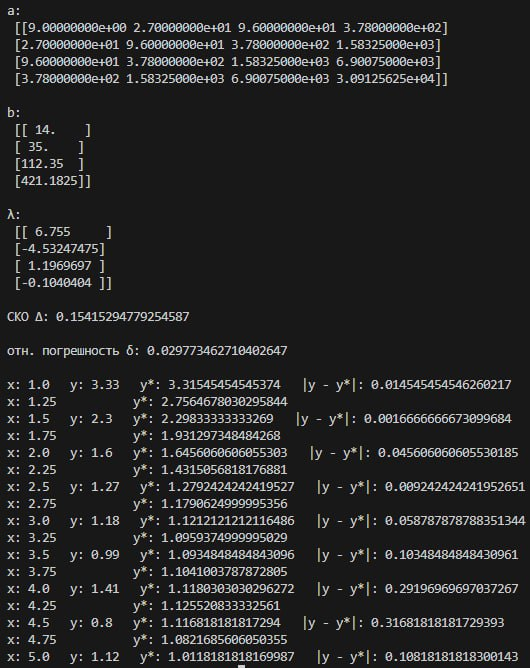
б) коэффициенты ;



в) СКО и относительная ошибка;



г) значения аппроксимирующего многочлена в узловых точках и в серединах отрезков между узловыми точками.



1. **Вывод**

В ходе выполнения лабораторной работы был изучен и реализован метод приближения функции с помощью аппроксимации алгебраическими многочленами с применением метода наименьших квадратов, был найден аппроксимирующий многочлен и найдены его значения в серединах отрезков между заданными узловыми точками. В результате тестирования была получена гладкая аппроксимирующая функция, доставляющая наименьшее значение среднеквадратичному уклонению, были найдены абсолютная погрешность аппроксимации и относительная погрешность аппроксимации .